Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Les maths comme je les aime /15

La beauté d'AUTANT

*Précision : ce texte s'appuie très librement sur l'article « Autant… ou pas ? » que j'ai publié sur le site « images des mathématiques (CNRS) ». Très librement parce qu'ici je n'écris pas des maths, je les effleure : **je les raconte… comme je les aime** 😊. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths !*

Y a-t-il autant de points dans un segment de 8 cm que dans un segment de 5 cm ? Le « bon sens » (*ça se voit !*) nous dit que non puisqu'il faut *prolonger* le petit segment pour obtenir le grand. Mais le « bon sens » se trompe et j'avais montré pourquoi dans l'épisode /1 « Le POINT de départ ! ».

Le problème du « bon sens » c'est qu'il s'appuie sur des visions parfois trop étroites. Mais accepter de les élargir n'est pas toujours facile : Galilée, « *E pur si muove!* (et pourtant elle tourne !) », ça vous rappelle quelque chose ?

Et si maintenant je vous affirmais qu'**il y a autant de points dans un segment microscopique que dans tout l'univers**, quelle serait votre réaction ?

Franchement ? Ça serait de hocher la tête avec tristesse et de nous dire « ça y est, il a craqué ! » 😁

Oui, bien sûr… eh bien c'est à peu près ce qui est arrivé à Cantor [Georg Cantor (1845-1918), le Grand Maître des infinis (et l'inventeur des « Aleph »)] : il était persuadé qu'il y avait beaucoup plus de points dans une surface que dans une ligne (et encore bien plus dans un « volume » que dans une surface) ! Mais en être persuadé ne lui suffisait pas alors il s'est mis en tête de le *démontrer*.

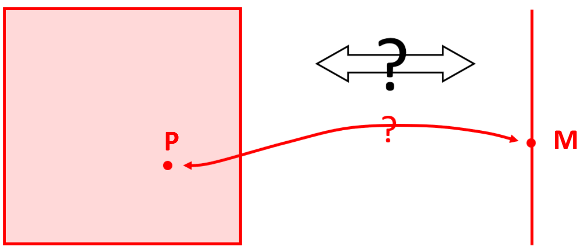
Il a donc tenté de démontrer qu'il y avait plus de points dans un carré (une surface) que dans un de ses côtés (une ligne). Et à sa stupéfaction horrifiée il a démontré… qu'il y en avait **AUTANT** ! Il en revenait tellement peu qu'il a imploré un autre mathématicien, Richard Dedekind, de contrôler sa démonstration afin qu'il puisse enfin y croire lui-même : il terminait sa prière par « **je le vois, mais je ne le crois pas** ».

Alors… qu'est-ce que vous disiez, à propos de l'univers ?

*Euh, s'il y a **vraiment** autant de points dans une ligne que dans une surface, pourquoi n'y en aurait-il pas autant dans une surface que dans un volume ? Mais c'est un peu dur à avaler, vous pourriez nous **raconter** sa démonstration ? Juste la raconter ?*

Pas de problème. Sauf que ce ne sera pas sa démonstration finale (qui utilise des fractions continues compliquées) mais une amélioration de sa première tentative. Dans cette tentative Cantor s'était appuyé sur des entrelacements de nombres en écriture décimale, bien plus facile à suivre. Sa technique d'entrelacements se heurtait à quelques difficultés mais en 1928 Erich Kamke a proposé dans sa « *théorie des ensembles* » (*Mengenlehre*, 1928) une technique améliorée et c'est celle-là que j'ai reprise dans « *Autant… ou pas ?* »… et que je vais donc vous *raconter* ! On y va ?

Y a-t-il autant de points dans un carré que dans un de ses côtés ?



Si c'est le cas il doit être possible de concevoir une *bijection* entre les points du carré et ceux du segment… c'est à dire une infinité de couples associant chacun un point du carré et un point du segment, de façon que :

– chaque point du carré ait un partenaire sur le segment,
– chaque point du segment ait un partenaire sur le carré
– deux points différents aient deux partenaires différents) !

Mais c'est ridicule ! Vous voyez bien que ce n'est ***pas*** *possible : pour chaque point du segment il y a toute une ligne de points du carré !*

C'est aussi ce que Cantor pensait ! Mais « *vous voyez bien que…* », ce n'est pas une preuve ! Ça veut juste dire que les relations qui sautent aux yeux, entre les points du segment et ceux du carré, ne sont pas des bijections ! Bon, et aussi que **SI** parmi toutes les relations possibles entre ces points **il existe** (au moins) ***une*** **bijection**… elle ne saute sûrement pas aux yeux.

Mais ça ne prouve pas non plus qu'il en existe une !

Non, évidemment pas. Mais en voulant démontrer qu'il n'en existait pas… pas de pot, Cantor en a déniché une ! Pas vraiment simple, d'accord – et même plutôt tordue mais tout de même une vraie bijection, tout à fait légitime. Vous ne trouvez pas que c'est un peu ironique ?

S'il vous plaît ? ***Qu'est-ce qu'il a fait*** *?*

D'abord il a traduit la situation sous forme numérique, il a :

- « plaqué » sur le carré un repère du plan, en choisissant 2 côtés perpendiculaires comme segments unitaires de 2 graduations qui ont comme origine le point commun à ces deux côtés,

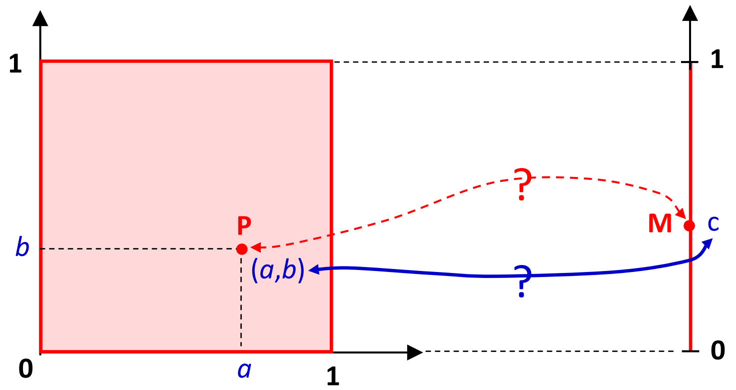
- puis « plaqué » sur un segment extérieur au carré et de même longueur qu'un de ses côtés une graduation qui a comme origine une extrémité du segment et comme point unité l'autre extrémité.

Bref, quelque chose comme ça :

Dans le repère du carré,
P a comme coordonnées deux nombres, *a* et *b*, compris tous les deux entre 0 et 1

Dans le repère du segment,
M a comme abscisse le nombre *c*, également compris entre 0 et 1.

Et la question devient numérique :



existe-t-il (au moins) une bijection entre
- d'une part *tous les **couples** de nombres réels* compris entre 0 et 1
- et d'autre part *tous les nombres réels* compris entre 0 et 1 ?

Et… et il en a trouvé une ? Cantor ?

Je ne sais pas si « trouvé » est le mot exact parce qu'il cherchait à montrer qu'il n'en existait pas, je dirais plutôt qu'elle lui est tombée dessus au cours de ses réflexions. Et que ça l'a secoué !

Comment lui est-elle tombée dessus ? Je n'étais pas là… mais il me semble que ça pourrait s'être fait en deux étapes :

d'abord en observant que les réels sur lesquels il travaillait étaient tous les nombres dont l'écriture décimale commençait par « 0,… » et continuait par une succession illimitée de chiffres.

> Une petite parenthèse : je ne voudrais pas alourdir cette histoire alors je reviendrai vraisemblablement dans un prochain épisode sur les différentes écritures décimales illimitées des nombres réels suivant qu'ils sont entiers, décimaux, rationnels, constructibles, algébriques ou transcendants… mais ça peut attendre, ici l'important est qu'ils sont tous caractérisés par une succession illimitée de chiffres.

Puis en se demandant s'il lui était possible d'imaginer un mécanisme permettant à la fois de « fondre » en un seul nombre *c* les deux nombres *a* et *b* du couple (*a*,*b*)… et réciproquement de retrouver *a* et *b* à partir de *c* !

Et si ça s'est passé comme ça c'est **là** qu'il a dû commencer à blêmir. Parce que pour quelqu'un de son intelligence la réponse était presque évidente : non seulement un mécanisme existait, mais il était même hyper simple. Regardez :

j'imagine que les coordonnées (a,b) d'un point P commencent par a = **0,**3 2 5 4 8 0 0 9 2 3…
et b = **0,** *0 7 6 0 3 5 5 8 2 1…*

eh bien, il suffit d'associer à P le point M dont l'abscisse commence par c = **0,**30275640830505982231 …
(en alternant : une décimale de l'un, une de l'autre… 😊) :

c est compris entre 0 est 1, c'est donc bien l'abscisse d'un point du segment-côté,
et les nombres qu'on obtient en prenant un chiffre sur deux de sa partie décimale sont bien a et b .

Autrement dit, M et P sont bien « partenaires ».

Bon, ce n'est pas tout à fait aussi simple que ça parce que les nombres décimaux ont presque tous (sauf 0) deux écritures décimales illimitées, l'une avec une suite illimitée de 0 l'autre avec une suite illimitée de 9 : si par exemple a est un décimal, lorsqu'on « entrelace » a et b on obtient deux abscisses c différentes suivant qu'on a choisi d'écrire a en « période 0 » ou en « période 9 ». Et donc on n'a plus une bijection : comme le dit une expression bien connue, le diable est dans les détails ! (Mais je ne vais pas insister parce qu'ici bien sûr je ne « fais » pas des maths, ***je les raconte***. Si vraiment c'est la démonstration que vous voulez découvrir, avec tous ses détails diaboliques, elle est dans « *Autant… ou pas ?* » !)

Mais si finalement ce n'est plus une bijection, pourquoi vous pensez que ça a secoué Cantor ?

Parce que ça s'en rapprochait trop, beaucoup trop pour sa tranquillité : les seuls blocages concernaient les décimaux, qui ne sont qu'une minuscule partie des nombres réels et il devait bien sentir qu'en travaillant les détails il allait finir par démontrer ce qu'il croyait impossible. Et c'est d'ailleurs exactement ce qu'il a fait quelques jours plus tard… mais pas avec la méthode d'entrelacement. Pourtant il aurait suffi de pas grand-chose pour la rendre parfaite et ce pas grand-chose c'est (à ma connaissance) Erich Kamke qui y a pensé. Là encore, je vous en ***raconte*** juste le principe :

tout d'abord il a décidé d'écrire tous les décimaux uniquement « en période 9 ».
Par exemple pour 0,573 il se débarrasse de l'écriture 0,573000000… et garde uniquement 0,572999999999…

*Mais ce n'est **PAS** 0,573 !*

Euh, « à l'infini », si : déjà après 6 décimales, la différence entre 0,573 et 0,572999 n'est plus que de 0,000001 🙂!
Mais ça aussi, j'y reviendrai dans un autre épisode, d'accord ?

Ensuite Kamke a mis en évidence des blocs de chiffres dans les parties décimales de a et de b suivant une méthode simple : le 1er bloc part de la virgule et s'arrête juste après le 1er chiffre différent de 0 ,
le bloc suivant commence juste après lui et s'arrête à son tour après le 1er chiffre différent de 0…
etc.

Par exemple si les coordonnées (a,b)

d'un point P commencent par a = **0,**3 2 5 4 8 0 0 9 2 3… et b = **0,** *0 7 6 0 3 5 5 8 2 1…*
voici leurs 1ers blocs (soulignés) : a = **0,** <u>3</u> <u>2</u> <u>5</u> <u>4</u> <u>8</u> <u>0 0 9</u> <u>2</u> <u>3</u>… et b = **0,** <u>*0 7*</u> <u>*6*</u> <u>*0 3*</u> <u>*5*</u> <u>*5*</u> <u>*8*</u> <u>*2*</u> <u>*1*</u>…

Et enfin, il « fond » a et b en c en entrelaçant les blocs (comme l'avait fait Cantor avec les chiffres) :

c = **0,** <u>3</u> <u>*0 7*</u> <u>2</u> <u>*6*</u> <u>5</u> <u>*0 3*</u> <u>4</u> <u>*5*</u> <u>8</u> <u>*5*</u> <u>0 0 9</u> <u>*8*</u> <u>2</u> <u>*2*</u> <u>3</u> <u>*1*</u>…

Et si « à l'envers » j'applique la même méthode à ce c ? Oui, gagné, je retrouve bien l'alternance des blocs de a et b !

c = **0,** 3 *0 7* 2 *6* 5 *0 3* 4 *5* 8 *5* 0 0 9 *8* 2 *2* 3 *1*… => c = **0,** <u>3</u> <u>*0 7*</u> <u>2</u> <u>*6*</u> <u>5</u> <u>*0 3*</u> <u>4</u> <u>*5*</u> <u>8</u> <u>*5*</u> <u>0 0 9</u> <u>*8*</u> <u>2</u> <u>*2*</u> <u>3</u> <u>*1*</u>…

Et avec ce système comme il n'y a plus de nombres à « période zéro », même si un bloc commence par une tonne de 0 successifs on est sûr d'avoir ensuite un chiffre différent… et le bloc s'arrête. C'est ça ?

Oui, c'est exactement ça. Joli, non ?

D'accord… vous gagnez encore ! Enfin, pour le carré et le segment, mais c'est quoi cette histoire d'univers ?

Patience, ça vient ! Bon, ce qu'on a fait avec un carré, on peut aussi le faire avec un cube : c'est juste un passage de la dimension 2 à la dimension 3. Les points du carré avaient 2 coordonnées, ceux du cube en ont 3 : pour écrire l'abscisse *d* du partenaire M d'un point P dont les coordonnées sont (*a*,*b*,*c*) il nous suffit d'étendre la méthode précédent à trois participants : les blocs de *d* sont des alternances entrelacées de blocs de *a*, *b* et *c* :

le 1er bloc de *a* puis celui de *b* puis celui de *c*… puis le 2^{e} bloc de *a*, celui de *b*, celui de *c*… etc.   Simple, non ?

Donc il y a **autant** de points dans un cube de 1 cm d'arête que dans une de ses arêtes (un segment de 1 cm de long !)
Vous ne trouvez pas ça drôle ?

*C'est complètement **bizarre**, oui ! Normal que Cantor n'y ait pas cru. Mais un cube de 1 cm d'arête ce n'est tout de même pas « tout l'univers » !*

Non, bien sûr. Mais l'univers, c'est un peu comme un immense cube, un cube dont chaque arête serait « toute une droite », n'est-ce pas ? Imaginez, juste comme ça, qu'on puisse trouver <u>une bijection entre tous les points d'une droite et ceux d'un segment</u> de 1 cm de long ?

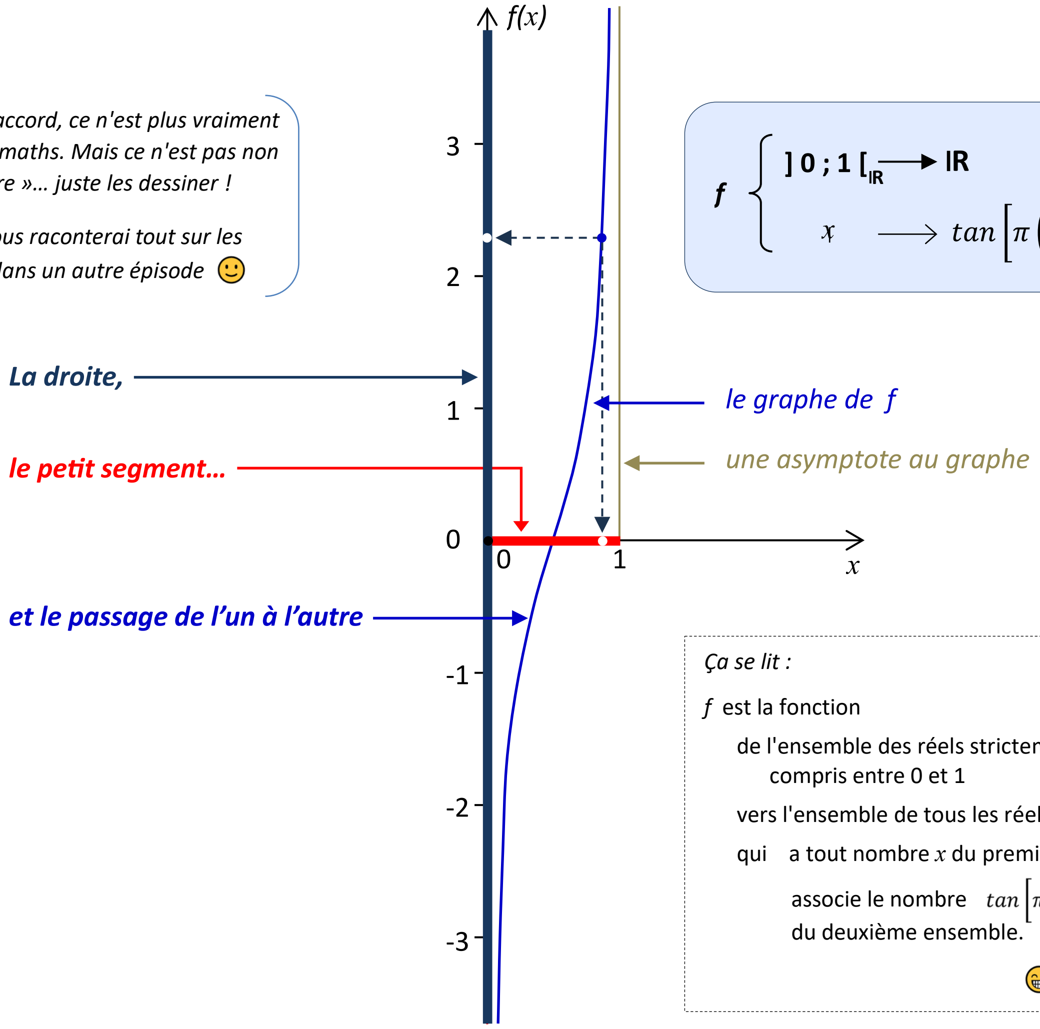
Alors il y aurait autant de points dans un petit cube (arête de 1cm) que dans le cube univers (« arête : une droite ») ! Et que dans un segment de 1 cm de long puisqu'il y a autant de points dans un cube de 1 cm d'arête que dans un segment de 1 cm de long … bon, vous devinez la suite ?

Oui, on devine ! Mais… ça existe, ça, une bijection entre tous les points d'une droite et un petit segment ?

En fait, oui… ou plus exactement une bijection entre leurs abscisses – mais ça revient au même.
Il en existe plusieurs, en voici une :

D'accord, d'accord, ce n'est plus vraiment raconter les maths. Mais ce n'est pas non plus « en faire »… juste les dessiner !

Promis, je vous raconterai tout sur les fonctions… dans un autre épisode 🙂



$$f \begin{cases}]\,0\,;1\,[_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \tan\left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$$

Ça se lit :

f est la fonction

de l'ensemble des réels strictement compris entre 0 et 1

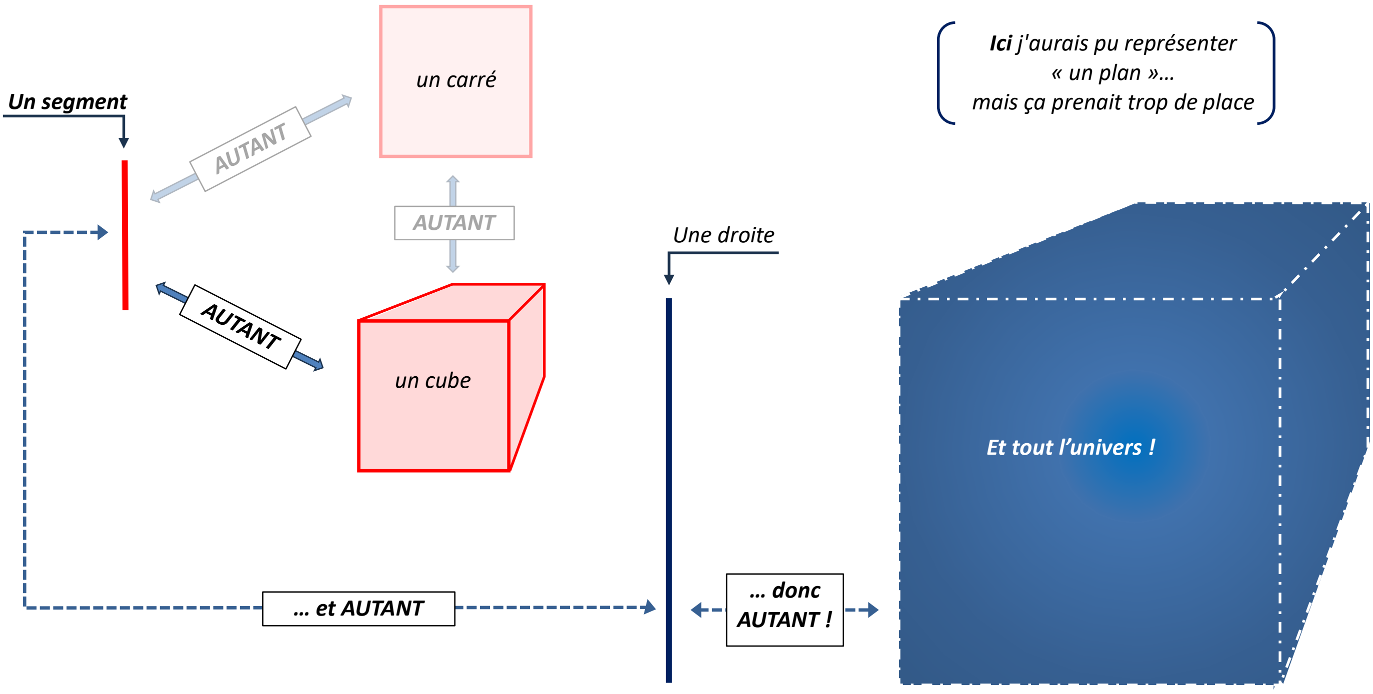
vers l'ensemble de tous les réels,

qui a tout nombre x du premier ensemble associe le nombre $\tan\left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$ du deuxième ensemble.

😁😁😁

Bon, un dernier dessin pour résumer tout ça ?

Non bien sûr ce dessin n'est pas « à l'échelle », IL NE PEUT PAS l'être !
Et bien sûr encore nous ne pouvons pas voir l'univers « du dehors » !



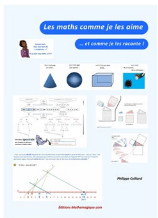
Il y a autant de points dans un segment que dans tout l'univers !

Dans cet épisode j'ai volontairement laissé tomber des détails – en particulier sur la notion d'ouvert et de fermé – qui en auraient alourdi la lecture mais vous pouvez les retrouver sur https://images.math.cnrs.fr/autant-ou-pas/ !

Volontairement également, j'ai choisi de présenter cet épisode AVANT les épisodes qui parleront des limites, des différentes sortes de réels (des entiers aux transcendants)… et des fonctions !

*Pourquoi ? Parce qu'en dehors même de son côté merveilleux – ou peut-être pour ça – il est une extraordinaire introduction à ces futurs épisodes, il en montre l'importance et l'utilité : il les légitime ! Alors qu'importe si une fois encore j'introduis dans un épisode quelques éléments venus du futur… il ne me semble pas que leur présence nuise à la compréhension de l'histoire que je raconte – et vous le savez ici **je raconte les maths**, je ne les construis pas* 🙂.

, 

et 

: [mes livres sont disponibles à la](#) fnac

J'essaie de partager :
en cliquant sur les couvertures vous accédez
(*entre autres*) à de nombreux extraits !
Oui, c'est gratuit…
et non, il n'y a aucun piège commercial, aucune
demande de renseignements.

Si toutefois vous voulez
acheter un de ces livres,
cliquez sur le logo Fnac !