Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe



# Les maths comme je les aime /16a



## Suites et jeux de boules / 1

*Dans la conclusion de l'épisode 2 (oui, ça remonte à… **LOIN** !) il y avait ces lignes :*

*Peut-être avez-vous remarqué qu'en aucun endroit de cet épisode je n'insiste sur l'idée que l'espace de points que nous imaginons est complet (le plus près que je m'en approche est dans la création, ci-dessus, du « point 3 » :*

*« sinon, comment un objet ponctuel passerait-il du premier point au deuxième ? »)*

*Un peu de patience, cela viendra, bien sûr. Mais pas encore tout de suite : il me paraît fondamental, dès ces premiers billets, de mettre en lumière l'infini **au moins** dénombrable de notre espace de points : comme David Bessis me l'a gentiment fait remarquer un jour au cours d'une rencontre imprévue, mes « objets ponctuels » tels que je les raconte (épisodes 1 , 1a et 1b) sont **des objets limites** – et les points sont également **des points limites**, des endroits que seuls des objets ponctuels peuvent occuper sans en déborder !*

*« Espace complet », « points limites »… 2 ans et 14 épisodes plus tard le moment est peut-être venu, non ?*

## N'insistez pas, on est complet 🙄

Les points dont je parle dans l'épisode 15 – et en réalité dans **tous** les épisodes précédents – n'existent pas… excepté dans la tête des mathématiciens : ils sont les éléments de « l'espace 3D », une simulation idéalisée, hyper-simplifiée de l'espace physique dans lequel nous vivons pour de bon (et qui a bien plus de trois dimensions !)

Mais ça n'empêche pas cet espace 3D d'avoir été construit avec rigueur, d'être structuré et en particulier d'avoir une « distance » : la distance entre deux de ses points est la longueur du segment qui les relie. Ah oui : et d'être **complet** !

*– Ah oui, bien sûr ! Euh… c'est quoi, un espace complet ?*

Bon, c'est comme son nom l'indique… un espace où il n'y a pas de trous, plus aucune place de libre.

*– Pas de trous ? C'est une définition mathématique, ça ?*

Pas exactement, non. Je l'écrirai dans la deuxième partie de cet épisode mais je vous rappelle qu'ici *je raconte* les maths, d'accord ? Ce qui va nous entraîner dans une branche des maths (*la **topologie***) assez étrange : au lieu de se focaliser sur les objets auxquels elle s'intéresse, elle observe *ceux qui les entourent* ! Bizarre, non ?

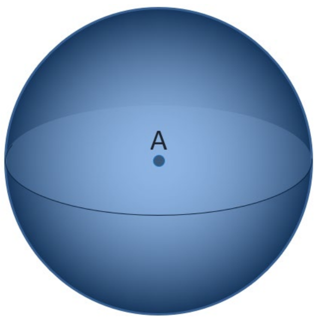
(« J'ai dit bizarre ? Comme c'est étrange ! » Oups, désolé, je n'ai pas pu résister : Louis Jouvet dans « drôle de drame »)

Dans cette première partie de l'épisode je vais simplement introduire 2 outils topologiques : les boules et les suites.

## Les boules d'espace

Ce sont des boules de l'espace 3D bien sûr : des boules de points !

Je choisis un point de cet espace, je l'appelle A (je sais, pas très original).
Et je choisis une longueur, par exemple 2 cm.
Bien sûr, vous savez ce qu'on appelle « la sphère de centre A et de rayon 2 cm » ?




*– Bien sûr ! J'ai lu le « sixième voyage » de « donc, d'après… » (je vous fais de la pub 😊) :*
*c'est l'ensemble des points de l'espace qui sont à **exactement** 2 cm de A.*
*Et c'est une surface ! Ça vous va ?*

Oui, évidemment !
Et « la *boule* de centre A et de rayon 2 cm », vous vous rappelez ce que c'est ?

*– L'ensemble des points **à l'intérieur** de la sphère : la sphère, c'est creux et la boule c'est un « solide », c'est plein !*

Oui, c'est ça. Enfin, plein… **de points**, qui ne sont que des endroits ! Mais quand vous dîtes « à l'intérieur » est-ce que les points de la sphère font partie de la boule, ou est-ce que la boule s'arrête juste avant de les atteindre ?

*– Ça y est vous recommencez ! À force, on devrait le savoir : vous commencez tout gentil tout raisonnable et après vous nous prenez la tête ! Je ne sais pas ! Bon, « la boule de centre A et de rayon 2 cm », c'est quand même un peu la même idée que « la sphère de centre A et de rayon 2 cm »… alors je dirais que la sphère fait partie de la boule ?*

Oui, pourquoi pas ? Mais vous pourriez aussi bien dire le contraire, non ? C'est à *nous* de décider si la boule s'arrête avant la sphère ou si la sphère en fait partie, c'est juste une question de définition ! De définition**s**, *au pluriel* parce que « *avant la sphère* » ou « *avec la sphère* » ça donne deux boules différentes (la seconde contient des points qui ne sont pas dans la première). Donc on a inventé des adjectifs pour préciser de quelle boule on voulait parler :

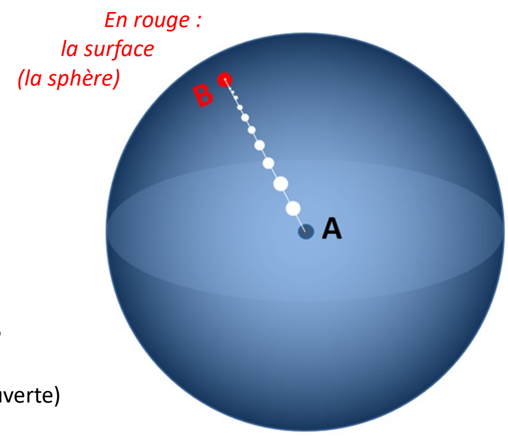
**Boule *fermée*** : une boule qui contient les points de sa frontière (la sphère qui l'enferme)

**Boule *ouverte*** : une boule qui s'arrête « juste avant » sa frontière (c'est quoi ce « *nooooon ?* » ironique ?)

D'accord ? Alors maintenant, une question comme vous les adorez : qu'est-ce que ça veut dire, « juste avant » ? Imaginez la sphère centrée en A et de 2 cm de rayon … et la boule ouverte de même centre et de même rayon :

**est-ce que les points les plus « extérieurs » de la boule ouverte** (… les plus loin de A) **vont toucher ceux de la sphère ?**

**La réponse est non** ! Imaginez un objet ponctuel qui part du centre A de la boule ouverte et qui se dirige vers le point B de la sphère qui « fermerait » cette boule en suivant le rayon [AB] :




il ne peut pas arriver en B (la sphère lui est interdite) donc il est ailleurs sur ce rayon. Mais alors **entre** lui et B il y a d'autres points du rayon (puisque notre espace 3D n'a pas de trous)… des points plus proches de B que lui :

**Il n'y a pas de « dernier point » d'une boule ouverte**,
c'est un peu la version mathématique du supplice de Tantale 😊 !

(J'ai fait partir l'objet ponctuel de A mais j'aurais pu le faire partir de n'importe quel point P de la boule parce qu'une boule – ouverte ou fermée – est un ensemble « convexe » : à l'exception de B lui-même, les points du segment [PB] sont tous des points de la boule ouverte)

Si vous êtes un tout petit peu perdu(e)s jetez un coup d'œil discret à la page 3 de l'épisode 2, à partir de « *Comment savons-nous qu'aucune ligne n'est finie ?* », en remplaçant « point 2 » par « A » et « point 1 » par « B »

*D'accord, boule ouverte, boule fermée, on a compris… mais ces boules, **à quoi elles servent**, en vrai ?*

*Seules*, à pas grand-chose, mais associées à une autre invention, *les suites*… elles vont nous permettre d'approcher les points qui nous échappent encore (les points d'une droite graduée dont les abscisses sont des nombres ***transcendants***… vous vous rappelez l'épisode 14 ?) d'aussi près que nous le voudrons ! De les débusquer enfin, de les désigner sans le leur dire, juste en attirant notre attention sur eux. En quelque sorte de les *allumer* à leur insu ! Mais là, il vous faudra tout de même attendre la deuxième partie de cet épisode, aujourd'hui je n'en suis qu'à la mise en place des outils !

*Ça y est, vous recommencez avec ce mot bizarre, « allumé »… mais vous ne nous l'avez jamais vraiment défini ! Qu'est-ce que c'est exactement, un point allumé ?*

Oui, vous avez raison, « allumé » me plaît beaucoup : je l'ai largement utilisé dans les épisodes 5, 6 et 7 mais ce n'est pas du tout un mot du vocabulaire officiel. Et il mérite un (long) paragraphe rien que pour lui parce que même s'il ne parle pas ni des boules ni des suites… il nous sera bien utile pour comprendre leur puissance !

Alors :

**Avant de raconter les suites, un petit détour par les points allumés d'une droite, puis de l'espace 3D**

En réalité je serais bien incapable d'allumer un point de l'espace 3D (ou même simplement de l'une de ses droites) : ces points-là n'existent que dans la tête des mathématiciens.

(Je ne pourrais d'ailleurs pas non plus allumer un point de notre espace physique parce qu'un point, c'est juste un endroit :
au mieux, je pourrais essayer d'y introduire un objet ponctuel brillant. Mais naturellement les objets ponctuels… ça n'existe pas 🙂!)

Toutefois je peux *imaginer* (et vous aussi), n'est-ce pas ?

J'ai donc imaginé dans les épisodes précédents que je partais d'un espace 3D tout noir et que j'en allumais *<u>certains</u>* points (et je vais décider bientôt que je peux même choisir leur couleur et l'intensité de leur brillance… ou de les éteindre) :

d'abord deux points au hasard, que je choisis comme origine et unité d'une graduation associée à la droite (encore noire) qu'ils définissent…

puis des points de plus en plus « serrés » de cette droite : ceux que j'atteins par un mécanisme (une construction géométrique ou un raisonnement) à partir de ces deux premiers points.

*<u>Dans la graduation que j'ai créée</u>* :

un premier mécanisme (*épisode 5*) atteint et allume les « *points entiers* » de la droite

un autre (*épisode 6*) atteint et allume ses autres « *points rationnels* »

un autre encore (*épisode 14*) atteint et allume certains de ses « *points irrationnels* » (les irrationnels *algébriques*).

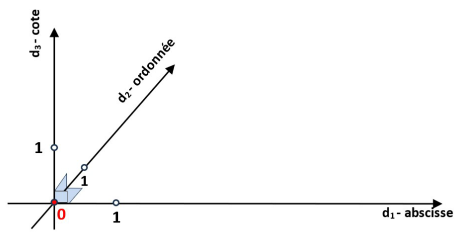
Et à chacun de ces points j'associe une « *abscisse* ». Une carte d'identité, un code qui porte en lui une information permettant de retrouver (d'atteindre) ce point à partir des points origine et unité de la graduation : un « *nombre* » !

Je l'ai déjà écrit dans l'épisode 14, il me reste encore à allumer une infinité d'autres points de cette droite mais tant que je n'ai pas trouvé comment les atteindre ces points n'ont pas d'abscisses – ils ne sont que des fantômes de points, aussi élusifs que la matière sombre de notre univers : je ne peux agir sur un point (l'allumer, l'éteindre…) que si je lui connais une abscisse !

(Un peu comme les poupées vaudou : pour qu'elles soient efficaces vous devez posséder et leur accrocher des cheveux de votre victime 😱)

**De la droite à l'espace 3D :**

comme pour la droite, pour allumer des points de l'espace 3D il me faut un repère. Ce repère, (« cartésien orthonormé »), je le crée en choisissant une longueur unité et en allumant un point origine et trois points unité sur trois droites perpendiculaires entre elles et passant par cette origine.
Ces trois droites (et leurs graduations) sont les *axes* du repère :
l'axe des abscisses, celui des ordonnées et celui des cotes.

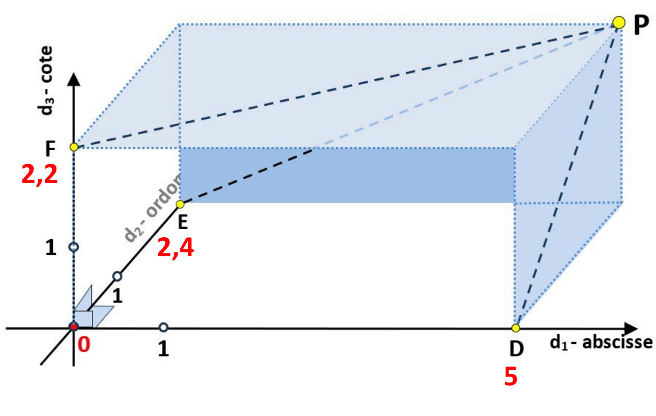



Bon, je n'insiste pas ?

*– Non, ce n'est pas la peine, ça on connaît !*

D'accord. Maintenant j'allume tous les points (les rationnels et quelques irrationnels) que je sais allumer sur ces trois droites et je choisis un de ces points sur chacune d'entre elles. À ce triplet de points correspond un point de l'espace 3D :

Ensemble, les points (allumés) D, E et F des droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$ apportent la lumière au point P de l'espace, « construit » à partir de ces points !




Bon, un tout petit peu de vocabulaire, maintenant :

j'appelle « *projections* » de P les points D, E et F…
et « *coordonnées* » de P les abscisses de ces points, dans les graduations de $d_1$, $d_2$ et $d_3$.

Toutefois, dans le repère de l'espace, seules les abscisses de « l'axe des abscisses » ont gardé leur nom, les deux autres sont devenues des « ordonnées » et des « cotes ».

**P** *a* *3 projections* **(des points)** *et* *3 coordonnées* **(des nombres)** *sur* $d_1$, $d_2$ et $d_3$ :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P → | **D** | abscisse sur $d_1$ de D | = | **5** | = | **abscisse de P** |
| P → | **E** | « abscisse » sur $d_2$ de E | = | **2,4** | = | **ordonnée de P** |
| P → | **F** | « abscisse » sur $d_3$ de F | = | **2,2** | = | **cote de P** |

Chaque triplet de points allumés de $d_1$, $d_2$ et $d_3$ allume de la même façon un nouveau point de l'espace 3D et je vais classer tous ces points comme je l'ai fait pour ceux de la droite :

« points entiers » points dont *les trois* projections sont des points entiers

« points rationnels » points dont *les trois* projections sont des points rationnels
(dont les points entiers, qui sont des points rationnels particuliers)

« points irrationnels » points qui ne sont pas rationnels
(**au moins une** de leurs projections n'est pas un point rationnel).

Bien entendu, dans l'absolu un point n'est rien de tout ça (vous vous le rappelez, c'est juste un bête endroit) : son état dépend entièrement du repère que j'ai choisi (un point sera entier dans un repère et irrationnel dans un autre) !

*– Bien entendu 🙄 ! Euh, c'est très intéressant mais **qu'est-ce que ça à voir avec les suites** ?*

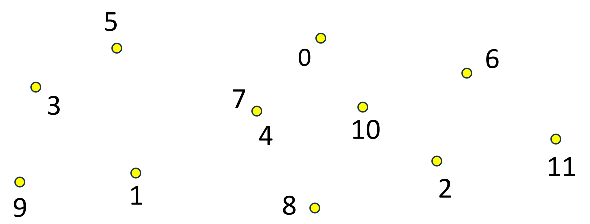
J'y viens, j'y viens, que vous êtes impatients ! Ça a TOUT à voir : les suites dont je voudrais vous parler portent sur des points allumés… et vont nous permettre de découvrir un fourmillement d'autres points. C'est parti :

## Les suites de points allumés de l'espace 3D

*Techniquement*, une suite est une application de l'ensemble ℕ des entiers naturels vers un ensemble de votre choix : pour nous, vers un ensemble choisi de points de l'espace.

*– Vous appelez ça « raconter » les maths, vous ?*

Désolé, ça m'a échappé 😊 ! En langage normal ça veut simplement dire que vous sélectionnez dans l'espace 3D des points qui vous intéressent et que vous associez un entier naturel à chacun de ces points. Un entier… ou plusieurs :



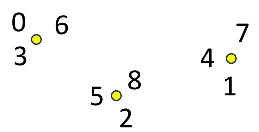

***Etc.***
(vous avez compris le principe !)

Ah oui, un détail important : vous devez utiliser **TOUS les entiers** (de 0 à… l'infini) **et une seule fois chacun** !

Encore un petit peu de vocabulaire : un entier que vous associez à un point s'appelle un « **rang** » ou un « **indice** » du point (oui, il peut en avoir plusieurs)… et le couple formé par un point et un rang est un « **terme** » de la suite.

ℕ est infini donc l'ensemble des termes d'une suite l'est également… mais l'ensemble des points que vous avez choisis peut ne pas l'être : rien ne vous empêche par exemple d'imaginer une suite avec seulement 3 points :

*– Mais c'est complètement idiot, ça ne sert à rien !*




***Etc.***

Oui, c'est vrai. Encore un peu de patience ?

(encore qu'ici les rangs d'un même point ont le même reste dans une division par trois 😊 … ça peut sûrement servir à quelque chose ?)

Évidemment, les suites « utiles » de points portent sur une infinité de points distincts, et ces points ne sont pas juste des points allumés quelconques, éparpillés dans l'espace : il y a une raison, une logique dans leur choix.

Évidemment aussi, ces suites sont *construites* : il est impossible d'indexer « à la main » une infinité de points !

Qu'est-ce que ça veut dire, « construites » ? Que leurs premiers termes sont éventuellement définis « à la main » mais que très rapidement un mécanisme automatique prend la relève et définit les termes suivants :

ou bien par une construction géométrique déterminant les nouveaux points de la suite en s'appuyant sur ceux qui existent déjà, ou bien par un algorithme numérique déterminant les coordonnées de ces nouveaux points en s'appuyant sur celles des points précédents. *Un mécanisme capable de fonctionner indéfiniment* !

*– Nous on veut bien, mais c'est quoi, une suite « utile » de points ? Qu'est-ce qu'elle fait… à QUOI elle sert ?*

Bon, il n'y a pas de réponse unique, tout dépend de la personne à qui vous posez la question. En ce qui me concerne (et ça n'engage que moi) : elle sert à approcher des points particuliers et parfois des *absences* de points (des « trous »… rappelez-vous le début de l'épisode), à attirer le regard sur eux ! Comment ? En cernant ces points – ou ces trous !

Ce qui nous amène au concept fondamental de « *point d'accumulation* ». Il est au cœur de la notion de suites de points mais plutôt que de faire de longs discours, vous voulez bien un exemple ?

*– Oui on veut ! Nous, les longs discours…*

Alors c'est parti :

je travaille dans l'espace 3D. J'imagine qu'au départ tous les points que je sais atteindre dans cet espace 3D sont allumés en bleu ciel. Les points que je vais choisir parmi eux passeront au rouge.

J'aimerais évidemment vous montrer cet exemple en 3D mais comme je n'ai malheureusement pas de projecteur holographique je me contenterai de dessins dans un plan. À vous d'imaginer que je travaille dans l'espace : lorsque j'écris « plan » ou « cercle », imaginez « espace 3D » et « sphère » !

Je choisis un point A et un rayon $r$ quelconques,
Exceptionnellement je colorie A en bleu vif. Puis…

*je choisis pour point de rang 0 (je l'appelle $P_0$)*
*un point du cercle de centre A et de rayon $r$,*

je choisis pour $P_1$ un point quelconque du plan, « loin de A »

*je choisis pour $P_2$ un point du cercle*
*de centre A et de rayon la moitié de $r$,*

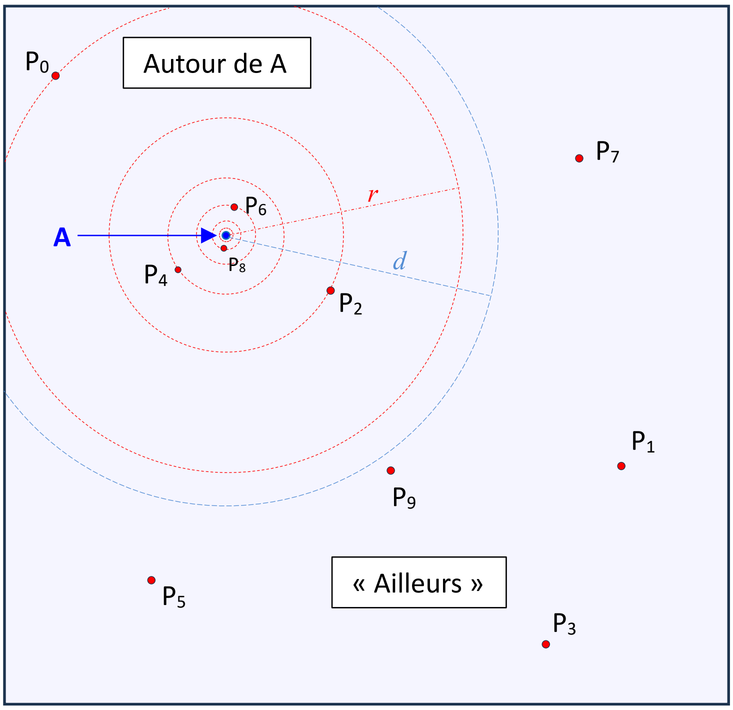
je choisis pour $P_3$ un point quelconque du plan, « loin de A »

*je choisis pour $P_4$ un point du cercle*
*de centre A et de rayon la moitié du rayon précédent,*

je choisis pour $P_5$ un point quelconque du plan, « loin de A »

*je choisis pour $P_6$ un point du cercle*
*de centre A et de rayon la moitié du rayon précédent,*

je choisis pour $P_7$ un point quelconque du plan, « loin de A ».




*Bref, pour tous les points de rang pair je choisis un point du cercle de centre A et de rayon moitié du rayon précédent.*

Et les points de rang impair ? Je choisis une longueur $d$ supérieure à $r$, j'imagine le cercle de centre A et de rayon $d$, j'appelle « ailleurs » l'ensemble des points du plan à l'extérieur de ce cercle… et je choisis pour les « points impairs » des points éparpillés de cette zone « ailleurs » (ce n'est pas vraiment nécessaire mais ça me facilitera les explications) !

Que va-t-il se passer pour les points de cette suite ?

Une infinité d'entre eux (la moitié d'une infinité, c'est bien une infinité ?) va s'éparpiller n'importe où dans « ailleurs », l'autre moitié d'entre eux (toujours une infinité !) va être comme agglutinée autour de A… mais « agglutinée » n'est pas exactement un mot officiel, n'est-ce pas ? En maths on dira que **A est un point d'accumulation de la suite**.

*– Parce qu'il y a des tonnes de points rouges pressés contre lui ?*

Plus que des tonnes, une infinité ! Bon, on essaie de mettre ça au propre ?

## Le retour des boules !

Vous vous rappelez qu'en théorie nous sommes dans l'espace, pas dans le plan ? Alors maintenant imaginez toutes les boules (ouvertes) centrées en A et de rayon inférieur à $d$. Qu'est-ce qu'elles ont de particulier… concernant les points de la suite, bien sûr ?

***Chacune contiendra une infinité de « points pairs »*** (et laissera échapper une infinité de « points impairs ») !

Bien sûr, à mesure que leur rayon diminue elles laisseront également échapper **quelques points pairs** :

$P_0$ si leur rayon est (strictement) compris entre $r$ et (sa moitié) $r/2$ (dit autrement : à partir de $P_1$ elles les contiennent tous !)
$P_0$ et $P_2$ s'il est compris entre $r/2$ et (sa moitié) $r/4$, (à partir de $P_4$ elles contiennent tous les autres)
$P_0$ , $P_2$ et $P_4$ s'il est compris entre $r/4$ et (sa moitié) $r/8$ (à partir de $P_6$ elles contiennent tous les autres)
…
de $P_0$ à $P_{20}$ s'il est compris entre $r/1024$ et $r/2048$ (à partir de $P_{22}$ elles contiennent tous les autres)
…
Et si le rayon d'une boule est 1 milliard de fois plus petit que $r$ (1 milliard c'est à peu près $2^{30}$) ?
Cette boule laissera échapper les 31 premiers points pairs… et à partir de $P_{62}$ elle contiendra tous les autres !

**A est un point d'accumulation de la suite** signifie :
**toute boule centrée en A contient une infinité de points de la suite.** *Toute boule*, qu'elle soit immense ou minuscule !

*– Oui, bon, d'accord, je crois qu'on a compris… mais ça ne nous dit toujours pas **à quoi sert** un point d'accumulation ?*

C'est vrai… Mais là, il se fait tard, il vous faudra vraiment attendre la deuxième partie de cet épisode !

A bientôt ?